

## 古法による円周率 $\pi$ の見直し

和 泉 堯 己\*<sup>1</sup>・富士川 龍 郎\*<sup>2</sup>

### 緒 論

現在 $\pi$ で表されている円周率は、古くから重要視され、いろいろと算出法が工夫されてきた自然定数の一つである。ごく古い時代には円の直径と円周の実測から求めたのであろうが、アルキメデス (B.C. 287~212) や劉徽 (B.C. 250頃) などの例のように、17世紀に微積分法が成立するまでは、主に円周または円の面積を内接または外接正多角形で近似してその極限を計算するという方法で求められた (平山, 第2, 3章)。このような幾何学的方法は、F. ヴィエタ (1540~1603) によって公式にまで完成され、その後少しの改良を経て完了したと考えられている (平山, 第3章)。ただその公式とその誘導法は必ずしも直感的ではない。著者らは幾何学的方法に解析的方法を併用することによって直感的にかつ簡明に別の表現で同等の式を導き得た。ある科学史家によると、現代以前に $\pi$ の種々な計算法を工夫し繁雑な計算を数十桁以上も行った国はヨーロッパと日本だけであり、この観点に立てば卓上計算機やマイクロコンピューターが手軽に利用できる現代では、それらに適した計算法があってもおかしくはないはずである。また $\pi$ の分数近似についても同様に卓上計算機ないしはパソコンの使用を前提として過去の見方を少し変えて近似分数を得た。しかし著者の調べ得た文献では著者らの見方のような $\pi$ の計算式誘導法や近似分数の求め方が見あたらなかったため、これらを併せて報告することとした。なお歴史上の事柄に関してはほとんど「平山諦著, 円周率の歴史<sup>1)</sup>」によったので、これを引用する場合には繁雑を避けて単に (平山, pp-) のように記載する。

### 1 $\pi$ の計算式

#### 計算式の誘導 1 三角関数を用いない正多角形の周辺長の算出法

数学史書には古い時代の $\pi$ の算出法として、多くはFig. 1を上げてある<sup>4)</sup>。いまFig. 1のように点Oを中心とする単位円を作り、円周上に点A, BをABが内接正6角形の一辺、PをABの2等分点となるようにとる。すると $\pi$ の第一近似としてABの3倍 $= 3 = AP \times 6$ が得られる。次にOPの延長と円との交点をQとし、BQ (またはAQ) を三角形の比例と三平方の定理から求めると、BQは正12角形の一辺であるから、BQの6倍が $\pi$ の第2近似となる。以下同様に多角形の数を2倍ずつまして計算を進め $\pi$ の近似値 (下限) を求めるのである。

\*<sup>1</sup> 現代文化学部社会臨床心理学科, \*<sup>2</sup> 広島アジア友好学院

外接正6角形は、Fig. 1点Bに接線を引いてOQの延長との交点をRとすると、2 x BRがその一辺となるから、BRを△BORと△BOPの間の比例関係を使って算出すれば2 x BRの3倍がπの上限、即ち外接正多角形からの第一近似となる。同様にして△BOSから外接正12角形の1辺2 x BSを算出すればπの第二近似が得られ、以下同様にして上限をより精密に算出し得る。

しかし以上のようにして最終的に得られる結果は事項のように三角関数を使った場合と同じとしても、一つ一つ多角形の一辺の長さを算出して行くのはかなりの労力を要し、また和算で行われたように内接正多角形以外の図形(例えば平山第6章)を用いる方法ではあまり簡明でも直感的でもない。この難点は次項のように図形に三角関数を併用すれば簡単に軽減できる。

**πの計算式の誘導2** πの定義及び次の諸定理と諸公式は確定したものとする。

円周=2πr, 三角関数の諸公式, 及び極限值に関する諸定理。

いま平面上の点Oを中心とする半径rの円周上に2点A, A'を, AA'が内接正n角形の一辺となるようにとる(Fig. 2)。AA'の2等分点をP, OPを延長して円周との交点をQとし, Qに接線を引き, 接線とOA, OA'の延長との交点をそれぞれB, B'とする。BB'は外接正n角形の一辺でAA'と平行, QはBB'の2等分点となる。

中心角∠AOA'を2αとするとα=π/m, 内外接正m角形と円に関して次の諸量が得られる。

	内接正m角形	円	外接正m角形
長さ	OP=rcos α	—	OQ=r
	AA'=2AP=2r sin α	—	BB'=2BQ=2r tan α
全周	2mr sin α	2πr	2mr tan α
面積	△AOP=(OP x AP)/2 =(r <sup>2</sup> sin α x cos α)/2	—	△BOQ=(OQ x BQ)/2 =(r <sup>2</sup> tan α)/2
全面積	2m x △AOP =mr <sup>2</sup> sin α cos α	πr <sup>2</sup>	2m x △BOQ =mr <sup>2</sup> tan α

またFig. 2より, △AOA' < 扇形AOA' < △BOB' および AA' < 弧AQA', であることは明らかであるから,

$$mr^2 \sin \alpha \cos \alpha < \pi r^2 < mr^2 \tan \alpha \quad 1.$$

$$\text{および} \quad 2mr \sin \alpha < 2\pi r \quad 2.$$

が得られる。式1, 2を整理してα=π/mを代入すると

$$\begin{aligned} m \sin(\pi/m) \cos(\pi/m) < \pi < m \tan(\pi/m) \\ m \sin(\pi/m) < \pi \end{aligned} \quad 3.$$

式3.より

$$m \sin(\pi/m) < \pi < m \tan(\pi/m) \quad 4.$$

円周は内外接多角形の周の間にあることが証明された。

mは3 ≤ mの任意の整数であるが, lim m→∞を算出するには, 出発とするm<sub>0</sub>を定めてmをその2倍, 4倍, ...とすれば, m=m<sub>0</sub> x 2<sup>n</sup>, n=0, 1, 2, ...であるから, m→∞のときn→∞, かつ三角関数の半角の公式を用い得る。ゆえに式4.にm=m<sub>0</sub> x 2<sup>n</sup>を代入してn→∞とすると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_0 2^n \sin(\pi / m_0 2^n) = \pi = m_0 2^n \tan(\pi / m_0 2^n)$$

tangentを書きかえると

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} m_0 2^n \sin(\pi / m_0 2^n) &= \pi \\ &= m_0 2^n \sin(\pi / m_0 2^n) / \cos(\pi / m_0 2^n) \end{aligned} \quad 5.$$

式 5. が正  $m$  角形の周長の長さより  $\pi$  を算出するための一般式である。数値計算には  $m_0 = 4$  または  $6$  , すなわち正方形又は正  $6$  角形から出発するのが簡明である。以下長さまたは面積の計算であるから平方根は正号のみを考える。

$$\begin{aligned} m_0 &= 4 \text{ とすると} \\ n=0 : \cos(\pi / 4) &= \sin(\pi / 4) = (\sqrt{2}) / 2, \quad (m=4) \\ n=1 : \cos(\pi / 8) &= \{(1 + \cos(\pi / 4)) / 2\}^{1/2} \\ &= 1/2(2 + 2\sqrt{2}/2)^{1/2} \\ \sin(\pi / 8) &= \{(1 - \cos(\pi / 4)) / 2\}^{1/2} \\ &= 1/2(2 - \sqrt{2})^{1/2} \end{aligned}$$

以下同様に半角の公式を用いて一般に

$$\begin{aligned} n &= \text{任意}, \quad (m = 4 \times 2^n): \\ \cos(\pi / 4 \times 2^n) &= \{(1 + \cos(\pi / 4 \times 2^{n-1})) / 2\}^{1/2} \\ &= (1/2) (2 + (2 + \dots (2 + (2 + \sqrt{2})^{1/2})^{1/2} \dots)^{1/2})^{1/2} \\ \sin(\pi / 4 \times 2^n) &= \{(1 - \cos(\pi / 4 \times 2^{n-1})) / 2\}^{1/2} \\ &= (1/2) (2 - (2 + \dots (2 + (2 + \sqrt{2})^{1/2})^{1/2} \dots)^{1/2})^{1/2} \end{aligned}$$

ただし指数  $1/2$  の個数は  $n$  個

..... 6.

$m_0 = 6$  とすると上と同様にして

$$\begin{aligned} n=0 : \cos(\pi / 6) &= (\sqrt{3}) / 2 \\ \sin(\pi / 6) &= 1/2 \\ n=1 : \cos(\pi / 12) &= \{(1 + \cos(\pi / 6)) / 2\}^{1/2} \\ &= 1/2(2 + \sqrt{3})^{1/2} \\ \sin(\pi / 12) &= \{(1 - \cos(\pi / 6)) / 2\}^{1/2} \\ &= 1/2(2 - \sqrt{3})^{1/2} \end{aligned}$$

ただし指数  $1/2$  の個数は  $n$  個

以下同様にして一般に,  $n$  任意,  $m = 6 \times 2^n$  ;

$$\begin{aligned} n=1 : \cos(\pi / 6 \times 2^n) &= \{(1 + \cos(\pi / 6 \times 2^{n-1})) / 2\}^{1/2} \\ &= 1/2(2 + (2 + \dots (2 + (2 + \sqrt{3})^{1/2})^{1/2} \dots)^{1/2})^{1/2} \\ \sin(\pi / 6 \times 2^n) &= \{(1 - \cos(\pi / 6 \times 2^{n-1})) / 2\}^{1/2} \\ &= 1/2(2 - (2 + \dots (2 + (2 + \sqrt{3})^{1/2})^{1/2} \dots)^{1/2})^{1/2} \end{aligned}$$

ただし指数  $1/2$  の個数は  $n$  個

..... 7.

式 5. に式 6. 又は 7. を代入して  $n$  を十分大きくすれば  $\pi$  を算出し得る。すなわち下限側より

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \times 2^n \cdot 1/2 \cdot (2 - (2 + (2 + \dots (2 + (2 + \sqrt{2})^{1/2})^{1/2} \dots)^{1/2})^{1/2})^{1/2} \quad \dots 8.$$

または

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \times 2^n \cdot 1/2 \cdot (2 - (2 + (2 + \dots (2 + (2 + \sqrt{3})^{1/2})^{1/2} \dots)^{1/2})^{1/2})^{1/2} \quad \dots 9.$$

上限側より

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \times 2^n \cdot (2 - (2 + (2 + \dots (2 + (2 + \sqrt{2})^{1/2})^{1/2} \dots)^{1/2})^{1/2})^{1/2} / (2 + (2 + (2 + \dots (2 + (2 + \sqrt{2})^{1/2})^{1/2} \dots)^{1/2})^{1/2})^{1/2} \quad \dots 10.$$

または

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \times 2^n \cdot (2 - (2 + (2 + \dots (2 + (2 + \sqrt{3})^{1/2})^{1/2} \dots)^{1/2})^{1/2})^{1/2} / (2 + (2 + (2 + \dots (2 + (2 + \sqrt{3})^{1/2})^{1/2} \dots)^{1/2})^{1/2})^{1/2} \quad \dots 11.$$

いずれも指数1/2の個数はn個とする。

面積の比較より 内外接正多角形と円の面積との関係は  $mr^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha < \pi < mr^2 \tan \alpha$ 。上限に関しては  $\pi < m \tan \alpha$  とかけば周辺の長さとの関係と同じになるから省略する。正m角形の面積を  $S_m$  とすると

$$S_m = mr^2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

次に正2m角形の面積  $S_{2m}$  は

$$\begin{aligned} S_{2m} &= 2mr^2 \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2) \\ &= 2mr^2 \{(1 - \cos \alpha)/2\}^{1/2} \{(1 + \cos \alpha)/2\}^{1/2} \\ &= mr^2 (1 - \cos^2 \alpha)^{1/2} \\ &= mr^2 \sin \alpha \\ &= S_m / \cos \alpha \end{aligned} \quad \dots 12.$$

mは任意であるから式12. は一般に成立する。mを  $m_0$  から出発して  $2^n$  倍していくと  $m = m_0 \times 2^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  であるからmの代わりにnを用いて  $S_m = S_n$  とかけば

$$\begin{aligned} S_0 &= m_0 r^2 \sin(\pi/m_0) \cos(\pi/m_0) \\ S_1 &= S_0 / \cos(\pi/m_0) \\ S_2 &= S_1 / \cos(\pi/2m_0) = S_0 / (\cos(\pi/m_0) \cdot \cos(\pi/2m_0)) \end{aligned}$$

一般に

$$S_n = S_0 / \cos(\pi/m_0) \cdot \cos(\pi/2m_0) \cdot \cos(\pi/4m_0) \dots \cos(\pi/2^n m_0) \quad \dots 13.$$

ここで  $n \rightarrow \infty$  とすると単位円では  $r = 1$  であるから、式13. より

$$\begin{aligned} \pi &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_0 / \cos(\pi/m_0) \cdot \cos(\pi/2m_0) \cdot \cos(\pi/4m_0) \dots \cos(\pi/2^n m_0) \end{aligned} \quad \dots 14.$$

式14. が内接正多角形の面積の極限として  $\pi$  を表す一般式である。図形上ではFig. 3において、 $\Delta A_1 O P_1$  の面積  $x_2 = (\Delta AOP \text{の面積}) / \cos \alpha$  の集積の極限を意味する。

$m_0 = 4$  (正方形から出発) とすると、 $\alpha = \pi/4$ ,  $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{1}/2$ ,

ゆえに  $S_0 = 4 \times \sqrt{1}/2 \times \sqrt{1}/2 = 2$ , また  $\cos \theta/2$  は  $\{(1/2) + (\cos \theta)/2\}^{1/2}$  と書けるから、式14. は

$$\begin{aligned} \pi &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2 / \cos(\pi/4) \cdot \cos(\pi/2 \times 4) \cdot \cos(\pi/4 \times 4) \cdot \dots \cos(\pi/2^n \times 4) \\ &= 2 / (1/2)^{1/2} \cdot (1/2 + 1/2(1/2)^{1/2})^{1/2} \cdot (1/2 + 1/2(1/2 + 1/2(1/2)^{1/2})^{1/2})^{1/2} \cdot \dots \end{aligned}$$

書きかえると

$$2/\pi = (1/2)^{1/2} \cdot (1/2 + 1/2(1/2)^{1/2})^{1/2} \cdot (1/2 + 1/2(1/2 + 1/2(1/2)^{1/2})^{1/2})^{1/2} \cdot \dots \quad 15.$$

式15. はヴィエタの公式である(平山, pp66~68)。なお式15. の解析的誘導法は数<sup>2-2</sup>)を参照。

$m = 6$  (正六角形より出発) とすると、

$$S_0 = 6 \sin(\pi/6) \cos(\pi/6) = 6 \times 1/2 \times (\sqrt{3})/2$$

であるから、前と同様にして式14. より

古法による円周率 $\pi$ の見直し

$$\begin{aligned} \pi &= \lim_{n \rightarrow \infty} (6x1/2x(\sqrt{3}/2)) / \cos(\pi/6) \cdot \cos(\pi/2x6) \cdot \cos(\pi/4x6) \cdot \dots \cos(\pi/2^n x 6) \\ &= \{3x(\sqrt{3}/2) / [((\sqrt{3}/2) \cdot (1/2+1/2((\sqrt{3}/2))^{1/2}) \cdot (1/2+1/2(1/2+1/2((\sqrt{3}/2))^{1/2})^{1/2}) \cdot \dots] \\ &= 3 / [(1/2+1/2((\sqrt{3}/2))^{1/2}) \cdot (1/2+1/2(1/2+1/2((\sqrt{3}/2))^{1/2})^{1/2}) \cdot \dots] \end{aligned}$$

かきかえると

$$3/\pi = (1/2+1/2((\sqrt{3}/2))^{1/2}) \cdot (1/2+1/2(1/2+1/2((\sqrt{3}/2))^{1/2})^{1/2}) \cdot \dots$$

あるいは

$$= (1/2+1/2(3/4)^{1/2})^{1/2} \cdot (1/2+1/2(1/2+1/2(3/4)^{1/2})^{1/2})^{1/2} \cdot \dots \quad 16.$$

式16.より、式15.の方が整って見えるので、公式としては式15.の方がスマートであろう。

面積の比較より 別解

Fig. 3より

$$\begin{aligned} \Delta AOA' \text{の面積} &= 2 \times \Delta AOP \text{の面積} = \\ &= 2 \times (1/2) r \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \text{であるから式12.に } \alpha = \pi/m \text{を代入すると} \\ &= (1/2)r^2 \sin(2\pi/m) \end{aligned}$$

ゆえに正 $m$ 角形の全面積は $S_m = (r^2 m/2) \sin(2\pi/m)$

$$m = m_0 \times 2^n, n = 0, 1, 2, \dots \text{とおくと}$$

$$S_m = r^2 \{m_0 \times 2^n / 2\} \sin \{ \pi / m_0 \times 2^n / 2 \}$$

ここで $n \rightarrow \infty$ ,  $r=1$ , かつ $\lim_{n \rightarrow \infty}$ とすれば上式は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (m_0 \times 2^n / 2) \sin \{ \pi / m_0 \times 2^n / 2 \} = \pi \quad 17.$$

式17.は $m_0$ を8又は12とすれば式5.で $m_0=4$ または6としたものと同じになる。

数値計算 8桁, 10桁, 12桁表示の卓上計算機, 及びコンピュータープログラムを用いて, 式9.と11.より得られた $\pi$ の計算結果の一部をTable 1にまとめた。

使用コンピューターは980NA/C, C-言語(Quick C)を最高精度で用いた。プログラムは省略した。

Table 1より, 普通に用いられる $\pi$ の近似値3,14ないし3,1416は正129角形( $n=5$ )ないし正384角形( $n=6$ )で十分得られるが, 同時に $n=5 \sim 6$ の辺りから計算機の桁数の制限から来る誤差が目立ち始め, 10桁計算機では $n=8$ より, 12桁計算機では $n=10$ より $\pi$ の上限がかえって $\pi$ の真値より小さくなる事が認められる。これらについては次項で考察する。

sineを中心とする $\pi$ の計算式8.~11.の特徴の第一は式の要素が簡単なことである。そして計算操作上最も困難な所は平方根を求める点であろう。しかしこれはルートキー付の計算機を使用するならば問題はなく, 計算操作は極めて単純になる。この利点は同格の計算式でも積を作っていくヴィエタの公式よりはるかに大きい。式8.~11.で計算する場合の最大の問題点は, 幾桁まで平方根を正確に求められるかという点にある。実際の計算では使用する計算機のディスプレイの桁数が直接の制限となり, 得られる $\pi$ の真値はほぼディスプレイの桁数の1/2の桁数までと考えてよい。このことはTable 1に明らかに現れている。実用上は $n$ を増したとき下限(上限)の値が上限(下限)の値を上(下)回ったり, 上限(下限)が $n$ を増すと増加(減少)し始めたりという異常が現われる点を求め, その一つ前の $n$ で計算を打ち切るようにすればよい。この制限が現れるのは平方根を途中で打ち切るための誤差が重なって, それに $4 \times 2^n$ または $6 \times 2^n$ が乗ぜられるためである。

しかし式そのものの収束はヴィエタの公式と同様, 種々な展開式の中では良いほうである。下限は $n$

が1増す毎に精度は4倍に上がると考えてよい<sup>2, 3)</sup>。上限もほぼこれと同じである。

式8.~11.の今一つの特徴は誘導法が簡明で、補助線なども要らず、直感的なことであろう。筆者には平田によるヴィエタの公式の誘導(平田, pp66~67)よりも簡明に思われる。筆者は教育法は専門ではないが、計算式が簡明で直感的であることは、初学者向きの $\pi$ の解説として有用であるように思われる。

## II 分数表示による $\pi$ の近似値

重要な自然定数である $\pi$ を簡単な整数比(以下分数という)や計算式で近似しようとする試みも古くからなされて来た。 $\pi$ が超越数であることが知られるまでは、単に近似しようというだけでなく、あるいは有理数として、または簡単な無理数( $\sqrt{2}$ の様な)を含む式として表し得るかもしれないとの希望を以て工夫されたのであろう。もちろんこれは不可能である。この様な試みは既に劉徽が355/113を得ていることから知られるように、その歴史は古い。東洋では何承天の調日法、それを受けて関、建部らの零約術へと発展し(平田, pp201~209)、ヨーロッパでは連分数としてランベルトに始まる研究(平田, p108)がある。ただその計算法は、正しく得られる桁数に限界があったり、特定の数以外には適用が困難であったりする。本項では、1) 分数による $\pi$ の近似値表示の一般的な求め方(より一般的に任意の小数を分数に変換する方法)を定め、2) 1項だけの近似分数としてはこの求め方のなかにすべて含まれることを明らかにし、3) それらの分数の中から実用的なものを選ぶこと、の3点を目的としたものである。

**近似分数の検索法** 古くから知られている $\pi$ の上下限は $3 < \pi < 22/7$ である[アルキメデス(平山, p31), 劉徽<sup>3)</sup>, その他]。これを $3/1 < \pi < 22/7$ と書きかえて以下の考察の出発点とする。

今 $3/1$ 又は $22/7$ の分母分子に適当な数を加えて $3/1$ と $22/7$ の間の有理数を作るものとする。 $A, B, P, Q$ を、 $A, B$ は同時には0でなく、かつ $P, Q > 0$ である整数とし、次の式

$$f = P/Q = (22A + 3B) / (7A + B) \quad 18.$$

を考える。 $f$ にたいする $A$ と $B$ との関係を詳しく見るため、Fig. 4の様に $A, B$ 座標上に $f$ を配置し、I, II, III, IVの4領域に分けて考察する。(下向きを+としたのは表作成に便利ようにしたためである。)

先ず式18.の分母分子に-1を乗ずることによって入れかわるから、領域IとIII、領域IIとIVはそれぞれ互いに対称である。故に領域IとIIを考えれば十分である。

領域Iに於いて、(1) 縦軸は $B = 0$ , 故に $f = 22/7$ , 横軸は $A = 0$ , 故に $f = 3/1$ , (2)  $A$ 一定のとき $B \rightarrow \infty$ ならば $f \rightarrow 3/1$ ( $f$ は減少する),  $B$ 一定のとき $A \rightarrow \infty$ ならば $f \rightarrow 22/7$ ( $f$ は増大する)。故に領域Iにある $f$ は $A, B$ ともに0の場合を除いて $3/1 \leq f \leq 22/7$ , 従ってこの限りで領域Iにある $f$ はすべて $\pi$ の近似分数となり得る。領域IIは3部分に分けて考える。(a)  $B = 0$ より $B = -7A + 1$ まで, 分母 $Q$ は $7A$ より+1まで減少, この領域では $f$ は $22/7$ より $(A+3)/1 \geq 22/7$ まで増加する。故にこの領域は考慮する必要はない。(b)  $B \leq -(7A+1)$ より $B = -22A/3$ まで, 分母は-1より小で, 分子は正で0まで減少( $A$ が3の倍数でないときには分子が正の範囲);  $f$ は $(-3)/-1$ より0まで増加する( $-\infty$ より0まで)。符号を考えなければ, この領域が近似分数の存在し得る領域である。(c)  $B \leq -22A/3$ の領域では分子も負となる。 $f$ は正となって $B \rightarrow \infty$ のとき0より3まで増加する。故にこの領域も考慮する必要はない。

領域I 式18.より $A=1, 2, 3, \dots, B=1$ 又は $2$ として $f$ の値を計算するとTable 2が得られる。Table

2から $B=1$ として $A$ を変えて最も近似のよい分数を選ぶと、 $\pi$ より大きいほうでは $A=15$ ,  $f=335/113$ , すなわちルドルフ数が得られ、小さいほうでは $A=15$ ,  $f=333/106$ が得られる。さらに精密な近似値を求めるためには次の2方法が考えられる。① Table 2の $B$ を拡大して式18. に当てはめて、 $\pi$ を挟んで最も近い2つの分数を探す、② 新たに分数 $(355A+333B)/(113A+106B)$ を考え、 $B=1$ の列で $A$ を変えて $\pi$ を挟んで最も近い2つの分数を探す。

①の方法を例で示すと、Table 2,  $B=1$ の列から、 $\pi$ の上下限は上述のように15と16に対応する分数である。そこで $333/106$ ,  $355/113$ それぞれの分母分子を2倍すると、それは $B=2$ の列で $A=30$ と32に対応する2つの分数となり、この間の $B=2$ ,  $A=30$ に対応する分数は $(22 \times 31 + 6)/(7 \times 31 + 2) = 688/219 = 3.141552\dots$ となり $333/106 = 3.141509\dots$ よりも真値に近づくことができた。一般には2倍の代わりに $A$ と $B$ を $n$ 倍して $(22nA+3nB)/(7nA+nB)$ とし、拡大したTable 2の $nB$ の列で、 $nA-1$ ,  $nA-2$ ,  $\dots$ ,  $n(A-1)+1$ , 範囲で $\pi$ を挟んで最も近い2つの分数を求めることになる。この方法は $n$ を大にしても必ずしもそれに見合うほど精度が上がるとは限らないようで、例えば $333/106$ と $355/113$ を①の方法で一万倍した場合でも得られる近似分数は、

$$3549230/1129755 = 3.1415\ 9264\ 6\dots\text{および}$$

$$3549252/1129762 = 3.1415\ 9265\ 4\dots$$

アンダーラインは $\pi$ の真値からはずれる位置、以下同じ

となって、真値と一致する桁数を1~2桁増し得ただけである。①の方法は何倍にするかを定めるための理論根拠が薄いことに弱点がある。

②の方法 分数 $f = (22A+3B)/(7A+B)$ は $B=1$ ,  $A=15$ または16のときそれぞれ $\pi$ の下限と上限となる。そこで新たに分数 $f_1 = (355A+333B)/(113A+106B)$ を考え、 $B=1$ として新たな上下限を求めると、より精密な $\pi$ の上下限が得られる。 $f_1 = (335A+333)/(113A+106)$ とすると、 $A=292$ 又は293のとき

$$(355 \times 292 + 333)/(113 \times 292 + 106) < \pi$$

$$< (355 \times 293 + 333)/(113 \times 293 + 106)$$

$$13993/33102 < \pi < 104348/33215$$

従って  $3.141592653\ 01 < \pi < 3.141592653\ 92$

少数点以下9けたまで $\pi$ の真値と一致した。

以下同様にして、 $f_2 \sim f_{11}$ の計算の記載は省略して $f_{12}$ とすると

$$(14885392687A + 6167950454)/(4738167652A + 1963319607)$$

より $A=1$ 及び2のとき

$$21053343141/6701487259 < \pi < 35938735828/11439654911^*$$

$$3.1415926535897932384\ 17 < \pi < 3.1415926535897932384\ 75$$

アンダーラインは真値から外れる位置、\*この両分数はランベルトの計算には出ていない(平田, 205)。

以下同様にして $\pi$ の真値が判明している限り、計算の労を厭わなければいくらでも上下限の精度を上げることが可能である。

これらの結果を平田, pp204~205に記載された値と比較すると $f_{12}$ まで建部賢明およびランベルトの計算と一致したが、 $f_5$ 以上ではランベルトの計算に結果に一部欠けているところがあるようである。しかしこれは例えば $f_5$ と $f_6$ のように隣り合う $f$ の下限が同じときに現れているので、計算方法の差異に起因するのかも知れない。有馬, 会田らの値(平田, p205)とはいずれとも一致しなかったが、これにつ

いてはつぎの③の項を参照されたい。

③ ②法の併用 前期①の方法で $10^4$ して得られた結果に②の方法を適用してみる。始めに得られる分数 $f'$ は

$$f' = (3549252A + 3549230B) / (1129762A + 1129755B)$$

である。B=1としてAを変えて計算し上下限を定めると

$$A=16;$$

$$60337262/19205947=3.1415926535 \underline{6} \dots < \pi$$

$$A=17;$$

$$63886514/20335709=3.1415926535 \underline{9} \dots > \pi$$

であるから355/113より精度を4桁上げ得た。①の方法は②と併用することによって効果的に精度を上げ得るようであり、かつ建部の結果やランベルトの計算(平山, pp204~205)とは異なった近似分数が得られた。しかしここでA=17として得られた近似分数は、有馬、会田の結果の一つ63885804/20335483と非常に近く、しかも両分子の差は335 x 2, 両分母の差は113 x 2であり、互いに関連があることを示唆している。そこで $(22A+3B)/(7A+B)=63885804/20335483$ と仮定して連立方程式

$$22A+3B=63885804$$

$$7A+B=20335483$$

を作ると、解はA=2879355, B=179998の正の整数となった。同様にして $(355A+333B)/(133A+106B)=63885804/20335483$ からはA=179385, B=613, また有馬、会田の結果を使うと、

$(355A+333B)/(113A+106B)=428224593349304/136308121570117$ からA=1202 4121 7726 3, B=4108 9201 183, といずれも解は正の整数である。このことからランベルトの近似分数も有馬、会田のそれもすべて広い意味でFig. 4の第一象限に含まれる事が明らかである。したがってランベルトの計算と、有馬、会田の計算とは、平田の主張(平田, p205)のように、計算の手続きが異なっただけではなからうか。

領域Ⅱ 領域Ⅱの( )の部分[便宜上(c)の部分も一部含める]は $f=(22A+3B)/(7A+B)$ の形では調べにくいので、 $B=-(7A+n)$ ,  $n=1, 2, \dots$ と置き変える。すると $f=(A-3n)/(-n)$ となり、AとnをFig. 4のようにそれぞれ縦横軸に配置するとfはTable 3のようになる。Ⅱ-(b)領域は $A-3n>0$ の範囲で $f<0$ ,  $A \rightarrow \infty$ のときfは $\infty$ より0までの値をとり得る。Ⅱ-(c)領域は $A-3n<0$ の範囲で、 $0<f<3$ である。ゆえに $|f|$ で $\pi$ の近似分数を考える事として $\pi$ の近似値が存在するならば $A-3n>0$ の範囲である。この範囲で $\pi$ の近似値( $\pi'$ とする)となる分数を検索するとすれば $|(A-3n)/-n|=\pi'$ より $A \doteq n(3+\pi')=(6.1415\dots)n$ ="整数に極めて近い数 $A_2$ ",の関係を満たすnを求め、この数より分数を定める事になる。この検索法は次のコンピューターによる検索法と基本的に同じである。

コンピューターによる検索 全面的にコンピューターによる検索機能に頼るならばさらに簡明に次のように考えることができる。

いまP, Qを正の整数として、次の $P_j, Q$ を考える。 $P_j/Q=\pi_j$ , ただし $\pi_j$ ="j桁まで $\pi$ の真数と一致するj桁の数",  $P_1$ =整数PとP+1の間の数, とする。 $P_1=\pi_j Q$ であるから、 $\pi_j$ を定め、 $\pi_j Q$ を計算し、小数以下に2桁かそれ以上が999...又は000となっているような別の数 $P_1$ を探す。 $P_1$ の整数部分を $P'$ とし、小数点の次が99...のときは $P'+1$ をPとし、小数点の次が00...のときは $P'$ をPとすると約束すれば、 $\pi \doteq P/Q$ である。もし $\pi_j$ を $\pi_j+3=6.1415\dots$ と置き換えれば前述Ⅱ-(b)の領域を検索する方法となる。

この方法を使って、一部に手動を交えて近似分数を検索した結果をTable 4に示す。Table 4より整数



に近い $P_1$ の出現には規則性があり、整数に近い $P_1$ を $g$ とすると $g_1 = (335n + 22s) / (113n + 7s)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $s = -1, 0, +1$ , で表され、分数 $g_1$ の値は $n$ が増すと $355/113$ に収斂して行くことが知られる。前述の近似分数 $f_1$ では $\pi$ の上下限となる分数の分母同志および分子同志の差は、分母では113, 分子では355であり、 $f_2$ では同じく分母では33215, 分子では10434, 以下同様である。つまりある近似分数 $f_n$ の上下限で分母同志, 分子同志の差を取ると, それぞれ一つ前の上限の近似分数の分母と分子になるという関係にある。おそらく $\pi$ の真値が式 $g_1$ の $s = -1$ と $+1$ の間から外れるとき, 次の分数 $g_2$ に移って $g_2 = (104348n + 355P) / (33215n + 113P)$ となり, 同様にしてさらに高次の近似分数となっていくのではないか。このように連分数とは関係のない検索法においても,  $f_n$ を含む一定のルールで $\pi$ に近い分数が現れてくることから,  $\pi$ 近似分数の検索法は $f_n$ のみを考慮すれば十分であると考えられる。

出発点とした式 $(22A + 3B) / (7A + B)$ は既に古く何承天(AC 370~447)が調日法として案出している。それは平山によると,  $(22x + 3y) / (7x + y) = 3.1415926$ と置いて得られる $x = 15.996y$ の近似式として $x = 16y$ を考え, 第2近似値として $355/113$ を得たものという(平山, p201)。この考え方は日本の関孝和(1642~1708)に続いて建部賢明(1661~1716)の零約術として発展した(平山, p201~208)。またヨーロッパでは連分数に基づくJ. H. ランベルト(1728~1770)の計算(平山, p205)もある。本項②の方法で得られた結果は前述の様に建部の結果(平山, p204)と $f_4$ まで完全に一致した。 $f_5$ 以降はランベルトの計算と多少異なる点がある。これらの方法は計算操作に差はあっても, 本質的に小数を連分数になおす計算である。ただランベルトの計算では, はじめに $\pi$ の近似値を30桁なり50桁なり定めてそれに分数を近づけて行くのであるが, 前項の②の考え方では初めに $\pi$ の近似値を定める必要はなく, 与えられた少数の上下限を分数の形で適宜定めれば, あとは計算機の計算能力に頼って判明している $\pi$ の真値の最後の桁まで一致させることが可能である。それゆえこの方法は少数を分数に変換する一般方法にもなり得る。しかし本項の計算の目的はより実用的な $\pi$ の近似分数を探すことにあるので, やたらに桁数を増すことはコンピューターなどの機能テストのような特別な目的でなければ不要であろう。本項からは単一の整数比で $\pi$ を近似することは本項の計算で尽くされていて, かつ精度を $355/113$ より上げようとすると分母と分子の桁数が飛躍的に増加することが知られた。一方実用的な近似分数はなるべく簡単に因数が多く, さらに記憶しやすいことが条件となる。これらのことを踏まえると実用的な $\pi$ の近似値は次のような考え方で選ぶのがよいと思われる。

- a. 目安程度でよい場合: 3, 3.1, 25/8など
- b. 普通程度の精度: 3.14, 22/7, 157/50, 223/71, 311/99

最後のものは記憶には便利であろう。

- c. 精密を要する場合: 3.141592, 355/113, 333/106,
- d. 特に精密を要する場合, これには限りがないが, 355/113の1000倍程度精密なものとする, 例えば $103993/33102 = 3.141592653 \underline{01} \dots$ などを上げることができよう。

なお本報作成途上プラトン(B.C. 427~348)の円周率 $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3.14 \underline{62}$ からヒントを得て実験的にいくつかの $\pi$ の近似値を得た。これらは平山の著書<sup>1)</sup>には見当たらなかったので参考までに紹介しておく。

$$(\sqrt{33} + \sqrt{17})^{1/2} = 3.141 \underline{28}$$

$$(\sqrt{2.96} + \sqrt{2.02}) 10^{-1} = 3.141 \underline{73}$$

$$\sqrt{10} - (\sqrt{428}) 10^{-3} = 3.1415 \underline{89}$$

$$3 + 10^{-1}(\sqrt{2}) + 10^{-4}\sqrt{3} = 3.14159 \underline{45}$$

$$3 + 10^{-1}\sqrt{2} + 10^{-5}\sqrt{293} = 3.141592 \underline{53}$$

なお、本論文を著すにあたり比治山大学 重光マリ子先生，同 枝廣遙子先生に多大の御指導・御協力を賜り謝意を表します。

## 参考文献

- 1) 平山 諦，円周率の歴史，改定新版，大阪教育図書，昭55.
  - 2) H.D.エビングハウスら，成木勇夫訳，数(上)，シュプリンガー・フェアラーク東京，1991，第5章，R.レンメルト， $\pi$ とは何か，pp114~180.
  - 3) 薮内 清，中国の数学，岩波新書，岩波書店，1974，第2，3章.
  - 4) 堀場芳数，円周率 $\pi$ の不思議，Blue Backs，講談社 1989.
- ほかに次の書を参考にした。
- 5) P.ベックマン，田尾，清水訳， $\pi$ の歴史，蒼樹書房.
  - 6) 金田康正， $\pi$ の話，東京教育図書，1002.
  - 7) 林 隆夫，インドの数学，中央公論社，中公新書 1155，1993.

(受理 平成17年9月26日)

古法による円周率  $\pi$  の見直し

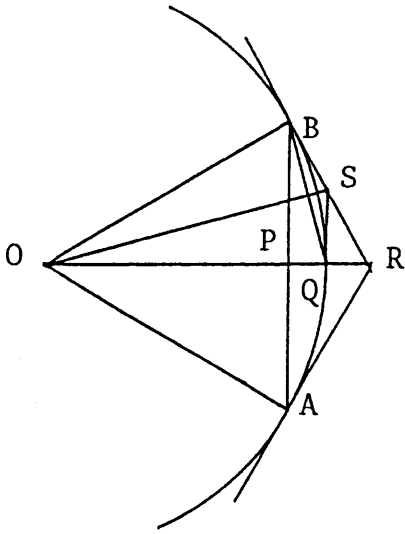


Fig. 1

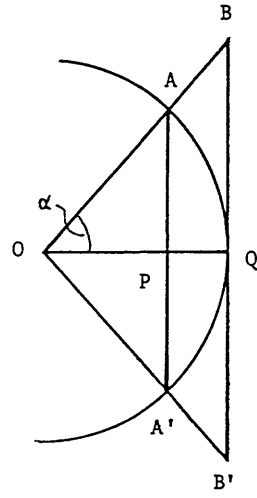


Fig. 2

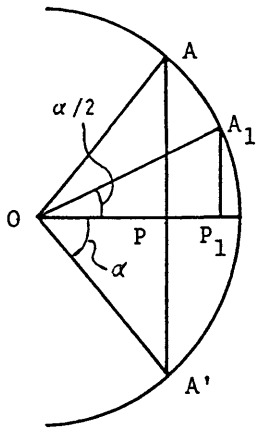


Fig. 3

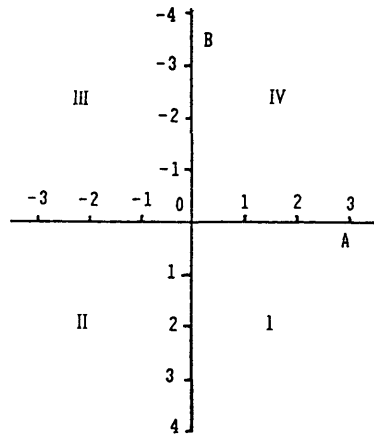


Fig. 4

Table 1. Values calculated with electronic calculator or computer programming.

n	Digit of calculator	$\pi$ calculated		m
		under limit	upper limit	
0	8	3.0000000	3.4641012	6
	10	3.000000000	3.464101616	
	12	3.00000000000	3.46410161515	
	16	3.000000000000000	3.464101615137755	
		.....		
5	8	3.1415616	3.1419648	192
6	8	3.1419648	3.1420416	384
	10	3.141556608	3.141661747	
7	10	3.141580015	3.141606299	768
8	10	3.141579264	3.141587360	1536
	12	3.14159034132	3.14159691233	
9	12	3.14159128003	3.14159299278	3072
10	12	3.14159128006	3.14159169073	6144
	16	3.141592516588155	3.141592927281094	
11	16	3.141592618640789	3.141592721314019	12288
12	16	3.141592645321216	3.141592670989523	24576
13	16	3.141592645321216	3.141592651738292	49152

True value of  $\pi$  : 3.14159 26535 89793 23846 ....

Table 2. Fractional number calculated from  $f = (22A + 3B) / (7A + B)$ .

A	B	
	1	2
1	25/8 < $\pi$	28/9 < $\pi$
2	47/15 <	50/16 <
	.....	
15	333/106 <	336/107 <
16	335/113 <	358/114 <
	.....	
30	663/211 >	666/212 <
31	-	688/219 <
32	-	710/226 >
	.....	

Table 3. Correlation of f to A and n in formula  $f = (A - 3n) / -n$ .

A	n		
	1	2	3
1	-2/-1	-5/-2	-8/-3
2	-1/-1	-4/-2	-7/-3
3	0/-1	-3/-2	-6/-3
4	+1/-1	-2/-2	-5/-3
5	+2/-1	-1/-2	-4/-3
6	+3/-1	0/-2	-3/-3
7	+4/-1	+1/-2	-2/-3
...	.....		

As  $f = (22A + 3B) / (7A + B)$  and  $B = -(7A + n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $f = (A - 3n) / -n$ , or  $f = (3n - A) / n$ .

Table 4. Fraction P/Q as approximation of  $\pi$ .

Q	Pi	P	$\pi' = P/Q$
7	21.991148	22	3.142857
.....			
106	333.008821	333	3.14150943
113	354.999969	355	3.14159292
120	376.991118	377	3.14166666
219	688.008791	688	3.141552511
226	709.999939	710	$(355/113) \times (2/2)$
233	731.991088	732	3.141630901
332	1043.008760	1043	3.1415662650
339	1064.999909	1065	$(355/113) \times (3/3)$
346	1086.991058	1087	3.1416184971
445	1398.008730	1398	3.1415730337
452	1419.999870	1420	$(355/113) \times (4/4)$
459	1441.991027	1442	3.1416122004
558	1753.008700	1753	3.1415770609
565	1774.999849	1775	$(355/113) \times (5/5)$
572	1796.990997	1797	3.1416083916

$Pi = \pi_j Q$ , as  $\pi_j = 3.1415926535$

## Abstract

Restauration de leurs ouvrages dans notre temps.

Takaki IZUMI\*<sup>1</sup>, Tatsuo FUJIKAWA\*<sup>2</sup>

Nous avons étudie a nouveau les methodes de calcul geometrique de  $\pi$  et sa fraction approximative, a condition d'employer un calculateur electronique.

Nous avons tire une formule des methodes dans lesquelles le sinus est employe. Cette formule est equivalente a celle de Vieta qui est le produit infini de cosinus. Cependant, la procedure de calcul de notre formule est plus simple que cell d'aucune autre formule, quand le caluculateur ajuste a la clef de racine est employe. Notre formule est plus intuitive que celle de Vieta, donc il nous semble qu'elle est convenable pour les debutants.

Chercher la fraction approximative de  $\pi$ , cela egale de calculer pour la fraction continue en principe. Cependant, l'application de l'idee de fonction et de coordonees montre que l'on peut calculer jusqu'au dernier chiffke de la valeur vraie connue de  $\pi$  en pricipie, sans mettre la valeur approximative de  $\pi$  en premier lieu comme le calcul de Lambert, et qu'il n'existe aucune fraction approximative plus simple que la fraction obtenue avec notre methode en ce qui concerne les fractions de monome.

(Received September 26, 2005)

---

\*<sup>1</sup> Hijiya University Faculty of Contemporary Culture, \*<sup>2</sup> Hiroshima Asian Friendship Academy